Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$	**2p**
	Cum a și b sunt numere raționale $4-\sqrt{2}=a+b\sqrt{2} \Leftrightarrow a=4$ și $b=-1$	**3p**
2.	$f(2020)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}$	**2p**
	$f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1} \Rightarrow f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}+\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}=\frac{3\left(2020^2+1\right)}{2020^2+1}=3$	**3p**
3.	$2^{2x}-2^{2x+3}=-7 \Leftrightarrow 2^{2x}\left(1-2^3\right)=-7 \Leftrightarrow 2^{2x}=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Sunt $3^3=27$ de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$	**2p**
	Deoarece numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ pentru care $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\neq 0$ este egal cu $2^3=8$, obținem că numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$ este egal cu $27-8=19$	**3p**
5.	$AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD}=m_{BC}$, deci $m_{AD}=1$	**3p**
	Ecuația dreptei AD este $y-3=1\cdot(x+1)$, deci $y=x+4$	**2p**
6.	$\operatorname{tg} 2x=-1$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $2x=\frac{7\pi}{4}$	**3p**
	$x=\frac{7\pi}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+12-(-2)-(-3)-0=18$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0$	**2p**
	$\det\left(A(a)\right)=a+17$, deci $\det\left(A(a)\right)\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-17\}$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, obținem $\det\left(A(1)\right)=18\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
	Soluția sistemului de ecuații este $(1,1,1)$	**3p**
2.a)	$2*\frac{1}{2}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+1=$	**3p**
	$=2-2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$	**2p**

b)	$a * x = a \Leftrightarrow 2ax - a - x + 1 = a \Leftrightarrow (2a-1)(x-1) = 0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$a = \frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f(x * y) = 2(x * y) - 1 = 2(2xy - x - y + 1) - 1 = 4xy - 2x - 2y + 2 - 1 =$	**3p**
	$= 4xy - 2x - 2y + 1 = (2x-1)(2y-1) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' - \left(\ln\left(2^x + 1\right)\right)' =$	**2p**
	$= 1 - \frac{1}{2^x + 1} \cdot \left(2^x + 1\right)' = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$0 < \frac{2^x}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x și $0 < \ln 2 < 1$, deci $\frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} > 0$, pentru orice număr real x, deci f este crescătoare	**3p**
c)	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{\ln\left(2^x + 1\right)}{x}\right) = 1 - 0 = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\ln\left(2^x + 1\right)\right) = -\ln 1 = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+2)\sin x}{x+2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} =$	**3p**
	$= -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)(\cos x)'\,dx = -(x+2)\cos x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$	**3p**
	$= -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\cos\frac{\pi}{2} + (0+2)\cos 0 + \sin x \Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 3$	**2p**
c)	$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{(x+2)^2 \sin^2 x}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} \Big\vert_{\frac{1}{n}}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**3p**
	$-\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{9}$, deci $n = 4$, care convine	**2p**